Conventions :

* Tous les espaces sont pointés, les applications et les homotopies préservent les points base (notés $*$).
* Tous les espaces sont gentils (CW complexes).
* $[X,Y] = \{$classes d'homotopie de $f: X \longrightarrow Y\}$
* ΣX = suspension de $X := S^1 \wedge X = S^1 \times X / (x,*) \sim (*,y)$.

  ΩX : espace des lacets de $X = \{ f : S^1 \to X$ continu $\mid f(*) = *\}$

$$\left([X, \Omega Y] \simeq [\Sigma X, Y] \right)$$

(1) K-théorie topologique

X compact, $\mathcal{F}(X) = \{$Fibrés vectoriels (complexes) sur $X\}$

<u>déf</u> : $K(X) = K(\mathcal{F}(X)) = \bigoplus_{\xi \in \mathcal{F}(X)} \mathbb{Z}[\xi] \Big/ [\xi] = [\xi'] + [\xi'']$ si $0 \to \xi' \to \xi \to \xi'' \to 0$ est exacte.

$\widetilde{K}(X) = \mathrm{Ker}(\mathrm{rg})$ si $\pi_0(X) = 0$ $\left(\mathrm{Ker}\left(K(X) \to \underbrace{K(A)}_{=\mathbb{Z}}\right)\right)$

$\mathrm{rg} : K(X) \longrightarrow \mathbb{Z}^{\pi_0(X)}$

$\forall n \geq 0$, $\widetilde{K}^{-n}(X) = \widetilde{K}(\Sigma^n X)$.

Espace classifiant :

$Gr(n,l) = \{$espaces de dim. n dans $\mathbb{C}^l\}$

$Gr(n,\infty) = \varinjlim Gr(n,l)$

<u>thm</u> : Pour tout X compact, on a
$$[X, Gr(n,\infty)] \xrightarrow{\simeq} \{\text{classes d'isomorphismes de fibrés de rg } n \text{ sur } X\}$$

En d'autres termes, $Gr(n,\infty) \simeq \underbrace{BU(n)} \simeq BGl_n(\mathbb{C})$.

$[X, BU(n)] \simeq \{U(n)\text{-fibrés sur } X\}$

<u>dém</u> : * Donné par le tiré en arrière du fibré universel sur $Gr(n,\infty)$.

* Si on a $p : \xi \to X$

$X = \bigcup_{i \in I} U_i$, I fini, tq on a $\alpha_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\sim} U_i \times \mathbb{C}^n$

+ tq on a une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i\in I}$ tq $\mathrm{supp}(\varphi_i) \subset U_i$.

$g_i : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{pr_2 \circ \alpha_i} \mathbb{C}^n \xrightarrow{(-)\times(\varphi_i \circ p)} \mathbb{C}^n$ s'étend à ξ tout entier.

Soit $g = \bigoplus_{i \in I} g_i : \xi \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} \mathbb{C}^n \subset \mathbb{C}^\infty$. g est linéaire injective sur chaque $p^{-1}(x)$. D'où $X \longrightarrow Gr(n,\infty)$, $x \mapsto g(p^{-1}(x)) \subset \mathbb{C}^\infty$. $\square$

déf : $BU = \varinjlim_n Gr(n,\infty) = \varinjlim_n BU(n)$

(Le morphisme $Gr(n,\infty) \longrightarrow Gr(n+1,\infty)$ correspond à $\xi^{univ}_{Gr(n,\infty)} \oplus \varepsilon$, ε fibré trivial de rang 1.)

thm : Pour X compact, on a :

$\rightarrow \tilde{K}(X) = [X, BU]$

$K(X) = [X, BU \times \mathbb{Z}]$

En particulier, la somme directe des fibrés induit une structure de H-espace en groupes abéliens sur BU.

rmk : BU est le H-groupe associé au H-espace $\coprod_n BU(n)$.

$BU(n_1) \times BU(n_2) \longrightarrow BU(n_1+n_2)$

lemme : Pour tout fibré vectoriel ξ sur X, il existe un fibré ξ' tel que $\xi \oplus \xi'$ est trivial.

cor : Pour tous fibrés ξ_1 et ξ_2 tels que $rg(\xi_1) = rg(\xi_2)$, il existe un fibré ξ tel que $[\xi_1] - [\xi_2] = [\xi] - [\varepsilon^{rg(\xi)}]$ dans $K(X)$.

fibré trivial de rang $rg\,\xi$

"preuve" du thm : $[X, BU(n)] \longrightarrow \tilde{K}(X)$ compatibles à $BU(n) \to BU(n+1)$,

$(\underset{\text{de rg } n}{\xi \to X}) \longmapsto [\xi] - [\varepsilon^n]$

donc donnent $[X, BU] \longrightarrow \tilde{K}(X)$. □

Périodicité de Bott

Le produit tensoriel de fibrés induit un morphisme

$\otimes : (BU \times \mathbb{Z}) \wedge (BU \times \mathbb{Z}) \longrightarrow BU \times \mathbb{Z}$, d'où une structure d'anneau sur $\pi_*(BU \times \mathbb{Z})$.

thm (Bott) : $\pi_*(BU \times \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]$, avec $\deg u = 2$.

cor : On a une équivalence d'homotopie $BU \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \Omega^2(BU \times \mathbb{Z})$.

dém : $f : S^2 \longrightarrow BU \times \mathbb{Z}$ représentant de u.

$S^2 \wedge (BU \times \mathbb{Z}) \xrightarrow{f \wedge id} (BU \times \mathbb{Z}) \wedge (BU \times \mathbb{Z}) \xrightarrow{\otimes} BU \times \mathbb{Z}$

par adjonction donne $BU \times \mathbb{Z} \longrightarrow \Omega^2(BU \times \mathbb{Z})$, iso. en homotopie. □

(2) K-théorie algébrique

<u>Déf</u> : Soit A un anneau commutatif.

$$K_0(A) = \bigoplus_{P\ A\text{-module projectif de t.f.}} \mathbb{Z}\,[P] \Big/ [P] = [P'] + [P''] \text{ si } 0 \to P' \to P \to P'' \to 0.$$

<u>thm</u> (Swan) : Si X est un espace compact, on a

$$K(X) \xrightarrow{\sim} K_0(\mathcal{C}(X, \mathbb{C}))$$
$$\mathcal{E} \longmapsto \{\text{sections de } \mathcal{E} \to X\}$$

<u>Question</u> : Comment définir $K_n(A)$ pour $n \geq 1$?

<u>Idée</u> : La K-théorie de A devrait être l'homotopie de $B\overbrace{GL(A)}^{\text{groupe discret}}$,

où $GL(A) = \varinjlim_n GL_n(A)$.

<u>Problème</u> : $BGL(A)$ n'est pas un H-espace.
$\pi_1(BGL(A)) = GL(A)$ n'est pas abélien.

<u>Solutions</u> : (1) On force $\pi_1(BGL(A))$ à devenir abélien. (Construction + de Quillen.)
(2) $\coprod_n BGL_n(A)$ est un H-espace. On prend le H-groupe associé.

, , , ,

(3) La construction + (Quillen)

<u>déf</u> : (i) X est <u>acyclique</u> si $\tilde{H}_*(X) = 0$. $\quad (H_*(X) = H_*(X, \mathbb{Z}))$

(ii) $f : X \longrightarrow Y$ est <u>acyclique</u> si la fibre homotopique F_f de f est acyclique.

<u>"Rappel"</u> :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\sim"', "\text{équiv. hom.}"] & & Y \\
& E_f \arrow[ur, "\text{fibration}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{matrix} \gamma(1) \\ \uparrow \\ (x, \gamma) \end{matrix}
\qquad I = [0, 1]$$

$a \in X \longmapsto (a, \text{chemin cst en } f(a))$

$E_f \subset X \times Y^I$ "$= \{(x, \gamma) \mid \gamma(0) = f(x)\}$"

$F_f =$ fibre de $E_f \to Y$ en le pt base

Lemme : f est acyclique si et seulement si, pour tout $\pi_1(Y)$-module M,

$$H_*(f) : H_*(X, f^*M) \longrightarrow H_*(Y, M) \text{ est un isomorphisme.}$$

(En particulier : Si Y est simplement connexe,

$$f \text{ acyclique} \iff H_*(X) \xrightarrow[H_*(f)]{\sim} H_*(Y).\ )$$

thm : Soit X un CW complexe connexe, $N \triangleleft \pi_1(X)$ un sous-groupe parfait (i.e. $N = [N, N]$). Alors :

(i) Il existe $f : X \longrightarrow X^+$ acyclique tq

$$\pi_1(f) = \big(\pi_1(X) \longrightarrow \underset{\cong\ \pi_1(X^+)}{\pi_1(X)/N}\big).$$

(ii) Pour tout $g : X \longrightarrow Y$ tel que $\pi_1(g)(N) = 0$,

$\exists\ h : X^+ \longrightarrow Y$ tq $h \circ f \sim g$ (homotopie) et h est unique à homotopie près.

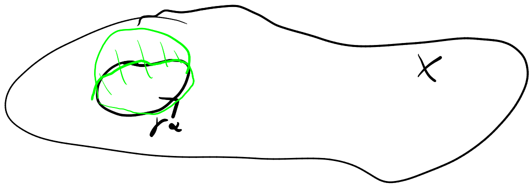
$$\begin{tikzcd} & X^+ \arrow[d, dashed, "h"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

preuve : Construction de $X \xrightarrow{f} X^+$:

(1) Cas $N = \pi_1(X)$: On choisit $\gamma_\alpha : S^1 \longrightarrow X$ représentant α pour tout $\alpha \in \pi_1(X)$. ($\pi_1(X)$ parfait !)

On attache des 2-cellules e^2_α à X en utilisant γ_α. Donc $X \hookrightarrow X'$, avec X' simplement connexe.

On a :



$$\underset{\cong\ \bigoplus_\alpha H_{i+1}(B^2, S^1)}{H_{i+1}(X', X)} \longrightarrow H_i(X) \longrightarrow H_i(X') \longrightarrow \underset{\cong \text{ excision } \bigoplus_\alpha \underbrace{H_i(B^2, S^1)}_{\substack{0 \text{ si } i \neq 2 \\ \mathbb{Z} \text{ si } i = 2}}}{H_i(X', X)}$$

Donc : $H_i(X) \cong H_i(X')$ si $i \geq 3$.

$$0 \to H_2(X) \to H_2(X') \to \bigoplus_\alpha \mathbb{Z} \to \underset{= 0}{H_1(X)} \to \underset{= 0}{H_1(X')}$$

Donc $H_2(X') \simeq H_2(X) \oplus H_2(X', X)$ et $\pi_2(X') \xrightarrow{\sim} H_2(X')$ (Hurewicz)

On choisit des $\varphi_\alpha : S^2 \to X'$ représentant une base de $H_2(X', X) \subset \pi_2(X')$.

On attache des 3-cellules à X' en utilisant ces φ_α.

On obtient $X' \hookrightarrow \underbrace{X^+}_{\text{simplement connexe}}$. Et $H_*(X) \simeq H_*(X^+)$.

(2) <u>Cas général</u>:

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[d, "p"'] \\ X \end{tikzcd}$$

revêtement correspondant à $N \subset \pi_1(X)$

$\pi_1(\tilde{X}) = N$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & \tilde{X}^+ \arrow[d] \\ X \arrow[r] & X^+ \end{tikzcd}$$

pushout homotopique, i.e. $X^+ = \tilde{X}^+ \amalg_{\tilde{X}} \underbrace{M_p}_{\text{mapping cylinder}}$

<u>où</u>:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\text{cofib}"'] & Y \\ & M_f \arrow[u, "\text{équiv. hom.}"'] \end{tikzcd}$$

$x \mapsto (x,1)$, $(a,x) \mapsto f(x)$, $y \mapsto y$

$M_f = (I \times X) \amalg Y / (0,x) \sim f(x) \quad \forall x \in X$

<u>Unicité</u>:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X^+ \arrow[d, dashed, "?\exists h"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

(1) Si $Y = K(A,n)$, A commutatif.
Existence de h résulte de
$H^*(X,A) \xleftarrow{\simeq} H^*(X^+,A)$

(2) En utilisant la tour de Postnikov, tout Y simplement connexe se dévisse en $K(A,n)$.

(3) <u>Cas général</u>: exo.

déf : $BGL(A)^+$ = résultat de cette construction pour
$X = BGL(A)$ et $N = E(A) \subset GL(A) = \pi_1(X)$.

($E(A)$ = groupe engendré par les transvections,
lemme de Whitehead : $E(A) = [GL(A), GL(A)] = [E(A), E(A)]$.)

déf : $K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+)$ $n \geq 1$.
$(K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+ \times K_0(A))$ $\forall n \in \mathbb{N})$

ex : $K_1(A) = GL(A)_{ab} = H_1(GL(A), \mathbb{Z})$

Plus généralement, on a l'application de Hurewicz :
$$K_n(A) = \pi_n(BGL(A)^+) \xrightarrow{(*)} H_n(BGL(A)^+) \simeq H_n(BGL(A)) \simeq H_n(GL(A)).$$

prop : $BGL(A)^+$ est un H-espace.

cor : $(*)$ induit un isomorphisme :
$$K_n(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} P\underbrace{H_n(GL(A), \mathbb{Q})}_{\text{algèbre de Hopf}}$$

Preuve de la prop :

lemme 1 : Soit $f : X \longrightarrow Y$ tel que :
* $\pi_1(X)$ agit trivialement sur $H_*(\tilde{X})$ ($\tilde{X}$ = revêtement universel de X)
  $\pi_1(Y)$ " " $H_*(\tilde{Y})$ ($\tilde{Y}$ " " Y)
* $H_*(f) : H_*(X) \longrightarrow H_*(Y)$ est un isomorphisme ;
* $\pi_1(f) : \pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(Y)$ est un isomorphisme.

Alors

lemme 2 : $B(GL(A) \times GL(A)) \xrightarrow{\sim} BGL(A) \times BGL(A)$ induit
$B(GL(A) \times GL(A))^+ \xrightarrow{p} BGL(A)^+ \times BGL(A)^+$, et p est une équivalence d'homotopie.